

**2011-2012 GÜZ DÖNEMİ
MAT102 MATEMATİK II
ÇALIŞMA SORULARI 1**

1. Aşağıda verilen dizilerin yakınsaklığını ve iraksaklığını inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$

(i) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{\cos n\pi}{2n+1}$

(b) $a_n = 1 - (-1)^n \frac{n^2+2}{2n^2+1}$

(j) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

(c) $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

(k) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

(d) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

(l) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

(e) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = \frac{n a_n}{n+1}$

(m) $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$

(f) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

(n) $a_n = \frac{3n^2}{2n+1} \sin \frac{1}{n}$

(g) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{8a_n}{a_n^2+4}$

(o) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$, $p > 1$

(h) $a_1 = 3$, $5a_{n+1} = a_n^2$

2. Aşağıda verilen dizilerin yakınsaklığını ve iraksaklığını inceleyiniz.

(a) $x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

(b) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$

3. Dizilerde limit tanımını kullanarak aşağıda verilen limitlerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $a_n = \frac{3n^2 - n + 1}{n - 2n^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{3}{2}$

(c) $a_n = \frac{5n^2 - 8n - 4}{9n^3 - 7n^2 - 3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(b) $a_n = \frac{6n^3 + 2n + 1}{n^3 + n^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$

4. Aşağıdaki serilerin toplamlarını hesaplayınız.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1} n - \tan^{-1}(n+1)]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

5. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklığını ve iraksaklığını inceleyiniz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3 - 2n + 3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!3^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + n \sin n}$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tan \frac{1}{n}$

6. Aşağıdaki formüller ile tanımlanmış $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinden hangileri yakınsar ve hangileri iraksar?

(a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1 + \sin n}{n} a_n$ (c) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$ (d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n$
 (b) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

7. Aşağıdaki serilerden hangileri mutlak yakınsak, hangileri şartlı yakınsak ve hangileri iraksaktır?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^3)}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n + 5^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

8. Aşağıda verilen serinin yakınsaklığını ve iraksaklığını araştırınız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n+1} \right).$$

9. Her n için $a_n > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a_n}{a_n}$ serisinin iraksak olduğunu gösteriniz. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ serisi için ne söylenebilir?

10. $U_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ olsun.

- (a) $\{U_n\}$ dizisinin
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ serisinin
 (c) $b_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ olmak üzere $\{b_n\}$ dizisinin

yakınsaklığını ve iraksaklığını inceleyiniz.

11. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapını, mutlak yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık aralığını hesaplayınız.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-e)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+n+3}}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \sqrt{n}}$

12. $|x| < 1$ için yakınsak olan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ kuvvet serisinin toplamını hesaplayınız.

13. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ for $|x| < 1$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ for $|x| < 1$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}$ for $|x| < 1$

olduğunu gösteriniz.

14. $\sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n}$ ve $\sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ olsun.

Bu iki serinin çarpımını ve çarpım serisinin toplamını hesaplayınız.

15. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ve $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ serilerinin çarpımlarını hesaplayınız. Çarpım serisinin hangi aralıkta hangi fonksiyona yakınsadığını araştırınız.

16. Aşağıdaki fonksiyonların, verilen mertebede, Maclaurin polinomlarını bulunuz.

(a) $f(x) = e^{x^2+2x}$ (3. mertebe) (b) $f(x) = \cos(\sin x)$ (4. mertebe).

17. Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin serilerini elde ediniz.

(a) $f(x) = e^x$ (c) $f(x) = \cos x$ (e) $f(x) = (x + 1)^2$
(b) $f(x) = \sin x$ (d) $f(x) = \cosh x$

18. Yerine koyma yöntemi ile fonksiyonların Maclaurin serilerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sin 3x$ (b) $f(x) = e^{-x/2}$ (c) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ (d) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

19. 16. ve 17.inci sorularda elde edilen serileri kullanarak, aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin serilerini bulunuz.

(a) $f(x) = x e^x$ (e) $f(x) = x \ln(1 + 2x)$
(b) $f(x) = x^2 \sin x$ (f) $f(x) = \sin^2 x$
(c) $f(x) = x \cos(\pi x)$
(d) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (g) $f(x) = \cos^2 x$ (yol gös : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$)

20. Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi gösterimlerini yazınız.

(a) $f(x) = \ln(2 - x)$, x in kuvvetleri cinsinden.
(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $(x + 2)$ nin kuvvetleri cinsinden.
(c) $f(x) = \frac{x}{1 + x}$, $(x - 1)$ in kuvvetleri cinsinden.
(d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, x in kuvvetleri cinsinden.

Bu gösterimlerin hangi aralıklarda geçerli olduklarını belirtiniz.

21. $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ özdeşliğini kullanarak $\sin^2 x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini elde ediniz. Sonra seriyi türeterek $2 \sin x \cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini elde ediniz. Bu serinin $\sin 2x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi olduğunu kontrol ediniz.

22. $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında $f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun Taylor serisini elde ediniz.

23. $f(x) = \ln(1 + x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini elde ediniz. $\ln(1.1)$ değerini 10^{-2} den küçük bir hata payı ile hesaplayınız.

24. Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin serilerini ve yakınsaklık yarıçaplarını hesaplayınız.

(a) $f(x) = 5^x$

(b) $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

25. Serileri kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sinh x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 3 \sin 2x}{5x - \tan^{-1} 5x}$